リーマンゼータ関数のローラン展開係数について(数論の数値解析への応用)

松岡, 楽

数理解析研究所講究録
537巻 1984年 42-47

10

リーマンゼータ関数のローラン展開係数について

信州大教育　松岡　楽（Yasushi Matsuoka）

1．リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の $s=1$ におけるローラン展開は，

(1) $$\gamma_n = \lim_{N \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log^n k}{k} - \frac{\log^{n+1} N}{n+1} \right\}$$

とおくと，

(2) $$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \gamma_n (s-1)^n$$

で与えられる。γ_0 は有名なオイラー定数であり，n が1以上のとき，γ_n は拡張されたオイラー定数とよばれ，正負の値をとりうる数列である（[1]，参照）。このの γ_n について，n が十分大きいところでは，任意の正数 ε に対して，

$$|\gamma_n| < e^{n \log\log n + \varepsilon n}$$

が成立し，また，どんな正数 n_0 が与えられても，$n > n_0$ をみたす実数 n で，

$$|\gamma_n| > e^{n \operatorname{loglog} n - \varepsilon n}$$

となるものが常に存在することが証明されている（[3]，定理4参照）。具体的にγ_nを計算すると次のようになる。$\gamma_0 = 0.5772156$，$\gamma_1 = -0.07281584$，$\gamma_2 = -0.00969036$，$\gamma_3 = 0.00205384$，$\gamma_4 = 0.00232537$，$\gamma_5 = 0.00079332$，$\gamma_6 = -0.00023876$，$\gamma_7 = -0.00052728$，$\gamma_8 = -0.00035212$，$\gamma_9 = -0.00003439$．

ここでは次の定理を証明する。

定理． $$|\gamma_n| < 0.0001\, e^{n \operatorname{loglog} n} \qquad (n \geqq 10).$$

この定理を用いることにより，次の系が得られる．$s = \sigma + it$ とおく．

系． $\zeta(s)$ は $0 \leqq \sigma \leqq 1,\ |t| \leqq 1$ で零点をもたない．

この系は，最初の複素零点が $\frac{1}{2} + i\, 14.134$ であることを考えるならば明らかであるが，証明方法に $\zeta(s)$ のローラン展開を用いるところが，ランメル [2] と同様である．

2。定理の証明．まず次の等式からはじめる（[3]の補題17参照）．

$$\gamma_n = \frac{1}{\pi}\Gamma(n+1)\,\mathrm{Re}\int_0^\infty (a+iy)^{-n-1} 2(2\pi)^{-a-iy} \cos\frac{1}{2}\pi(a+iy)\,\Gamma(a+iy)\,\zeta(a+iy)\,dy,$$

ただし，$a = \dfrac{n}{\log n}$ ，　$n \geqslant 10$ とする．この等式より，

$$|\gamma_n| \leqslant \frac{1}{\pi}\, n! \int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}} 2(2\pi)^{-a} \left|\cos\frac{1}{2}\pi(a+iy)\right| \left|\Gamma(a+iy)\right| \left|\zeta(a+iy)\right| dy$$

が得られる．ここで次の3つの不等式を用いる．

$$\left|\cos\frac{1}{2}\pi(a+iy)\right| \leqslant e^{\frac{1}{2}\pi y},$$

$$\mathrm{Re}\log\Gamma(a+iy) \leqslant \frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)\log(a^2+y^2) + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12a},$$

$$|\zeta(a+iy)| \leqslant \zeta(10) < 1.001 \quad .$$

この2番目の不等式は，ビネの第1公式（[4], p.249参照）によって，ガンマ関数を近似することにより得られる。この3つの不等式より，

$$(3)\qquad |\gamma_n| < 2.002\,\frac{n!}{\pi}\, e^{-a\log 2\pi + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12a}} \int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}(n-a+\frac{3}{2})} dy$$

が成立する．ここで2つの不等式

$$\int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}(n-a+\frac{3}{2})} dy < \int_0^a a^{-(n-a+\frac{3}{2})} dy + \int_a^\infty y^{-(n-a+\frac{3}{2})} dy ,$$

$$n! \leqslant \exp\left(n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12n}\right)$$

を用い，$a = \dfrac{n}{\log n}$ を (3) に代入すると，

$$|\gamma_n| < 4.004\left(1+\frac{1}{n-\frac{n}{\log n}+\frac{1}{2}}\right)\exp\left(-\frac{n\ \mathrm{loglog}\ n}{\log n}-\frac{n\ \log 2\pi}{\log n}+\frac{1}{2}\ \mathrm{loglog}\ n+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12n}+\frac{\log n}{12n}\right)\ \exp(\ n\ \mathrm{loglog}\ n)$$

となり，　$n \geqslant 10$ であるから，これを計算すると，

$$|\gamma_n| < 0.000_1\ e^{n\ \mathrm{loglog}\ n}$$

を得る．これで定理が得られた．

3. 系の証明。(2) の両辺に $s-1$ をかけると，

$$(s-1)\zeta(s) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\ \gamma_n (s-1)^{n+1}$$

となる．それゆえ，

(4) $$\left|(s-1)\zeta(s)\right| \geqslant \left|1+\gamma_0(s-1)\right| - \sum_{n=1}^{9}\frac{|\gamma_n|}{n!}|s-1|^{n+1} - \sum_{n=10}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{n!}|s-1|^{n+1}$$

を得る．ここで，(4) の第 1 項を計算すると，$0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant 1$ であるから，

$$\left|1+\gamma_0(s-1)\right| \geqslant 1-\gamma_0 > 0.4227$$

となる．第 2 項は $|s-1| \leqslant \sqrt{2}$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{9}\frac{|\gamma_n|}{n!}|s-1|^{n+1} \leqslant \sum_{n=1}^{9}\frac{|\gamma_n|}{n!}\ 2^{(n+1)/2} < 0.1614$$

である．次に (4) の第 3 項を計算する．$|s-1| \leqslant \sqrt{2}$ であるから定理より，

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{n!}|s-1|^{n+1} < 0.0001\sum_{n=10}^{\infty}\frac{e^{n\ \mathrm{loglog}\ n}}{n!}\ 2^{(n+1)/2}$$

となり，ここで不等式

$$\frac{1}{n!} \leqslant \exp(-n\log n + n - \frac{1}{2}\log n - \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12n})$$

を用いて，

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{e^{n\ \mathrm{loglog}\ n}}{n!}\ 2^{(n+1)/2} < \sum_{n=10}^{\infty} 2(2n\pi)^{-1/2} e^{\frac{1}{12n}} \exp(-n(\log n - 1 -$$

$$- \mathrm{loglog}\ n - \frac{1}{2}\log 2)) < 0.18\sum_{n=10}^{\infty} e^{-0.1219\,n} < 0.4627$$

を得る．それゆえ，

$$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{|\gamma_n|}{n!}|s-1|^{n+1} < 0.0001$$

が成立する．したがって (4) より

$$|(s-1)\zeta(s)| > 0.4227-0.1614-0.0001 > 0$$

となり，これで系が証明された．

参考文献

[1] W.E.Briggs, Some constants associated with the Riemann zeta function, Michigan Math. J. 3 (1955/56), 117-121.

[2] E.Lammel, Eine Beweis, dass die Riemnnsche Zetafunction $\zeta(s)$ in $|s-1| \leqq 1$ Keine Nullstelle besitzt, Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A. 16 (1966), 209-217.

[3] Y.Matsuoka, On the power series coefficients of the Riemann zeta function, preprint.

[4] E.T.Whittaker and G.N.Watson, A course of modern analysis, forth ed., Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1927.

On the coefficients of Laurent expansion of the Riemann zeta function

Abstract: In this paper we consider the coefficients of Laurent expansion of the Riemann zeta function about the pole, and give their explicit estimates, to show that the Riemann zeta function has no zeros near the pole. The proof of this result is similar to that of Lammel.